207 - Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

I) **Prolongements par régularité** [Gou] + [Pom] + [Tiss]

1) Prolongement continu

Th : (E,d) et (F,d') deux espaces métriques. D une partie de E et f définie sur D à valeurs dans F. a un point d'accumulation de D dans E. Si f n'est pas définie en a, et si f(x) tend vers un certain l quand x tend vers a en restant dans D, alors on définit g sur D U {a} en posant g=f sur D et g(a)=l. g est continue en a et est appelée « prolongement par continuité de f » [Gou 16]

Ex : sin(x)/x

Th : (E,d) et (F,d') deux espaces métriques. A une partie dense de E. Si on a f continue de A dans F si pour tout x de E\A la limite de f(y) quand y tend vers en restant dans A existe, alors il existe un unique prolongement continu de f [Gou 23] *(on définit g comme valant f sur A, et valant la limite de f(y) pour y tend vers x si x est pas dans A. Reste à mq g est continue et unique)*

Ex :

Th : (Tietze Uryshon) E espace métrique, A un fermé de E et f une fconction de A dans R, continue et bornée. Alors il existe une fonction g qui prolonge f sur E, tq le sup et l'inf de g sont égaux aux sup et inf de f [Gou 66] [Tiss 117] *(se ramener au cas où inf(f)=1 et sup(f)=2, puis on définit g avec une formule dépendant de d(x,A), on vérifie qu'elle est continue en tout point E en distinguant 3 cas : sur A, sur la frontière et en dehors)*

Appl : (lemme d'Urysohn) A et B deux parties fermées et disjointes d'un espace métrique E. Alors il existe une fonction continue g de E dans [0,1] nulle sur A et égale à 1 sur B [Tiss 118] *(l'appl qui vaut 0 sur A et 1 sur B est continue sur AUB et on prolonge à E par le th précédent)*

2) Complétude et prolongements

Prop : (critère de Cauchy pour les fonctions) E esp métrique, F complet. f une appl définie sur un sous ens D de E. Soit A une partie de D et a dans l'adhérence de A. f admet une limite en a quand x tend vers a en restant dans A ssi une sorte de critère de Cauchy [Gou 21] [Pom 48]

Appl : si f est une appl dérivable sur]a,b[à dérivée bornée, alors f a un prolongement continu en a et b [Pom 48] *(dérivée bornée donc LIP donc vérifie critère de Cauchy donc existence de limite et on conclut par prolongement continu)*

Th : (E,d) et (F,d') deux espaces métriques, A dense dans E. Si f est UC sur A, F complet, alors il existe un unique prolongement UC de f [Gou 23] *(se ramener au cas continu, on mq la limite existe (grâce à l'UC, la complétude et le critère de Cauchy). On a donc un prolongement continu. On montre l'UC du prolongement grâce à l'UC de f. On montre l'unicité grâce au cas continu)*

Appl : (E,d) un espace métrique. A isométrie près, il existe une unique injection i de E dans Ê complet avec i(E) dense dans Ê [Gou 25] (attention : utilise le fait que R est complet, + prolongement !)
((E,d) un espace métrique
CONSTRUIRE Ê : C l'ensemble des suites de Cauchy de E. On montre que si U et V sont des éléments de C, (d(un,vn)) cv vers une limite notée D(U,V) (on utilise que R est complet). On mq D est une semi distance sur C. On mq U=V si D(U,V)=0 est une relation d'équivalence et on note Ê l'espace C quotienté par cette relation.
MQ D EST UNE DISTANCE SUR Ê : si U est une suite convergente de E qui cv vers a, alors sa classe dans Ê est l'ensemble des suites qui cv vers a. On mq que D(U,V) est indtp du choix des représentants et non note donc D(U^,V^), on mq D est une distance sur Ê.
MONTRER L'INJECTION ET LA DENSITÉ : à tout élément a de E, on associe la classe de la suite cste égale à a. On montre que c'est une isométrie donc une injection. reste à montrer la densité. U^ une classe dans Ê, U=(un), on mq U^ est limite de i(un).
Ê EST COMPLET : on regarde une suite de Cauchy de Ê, pénible.
LE COMPLÉTÉ EST UNIQUE A ISOMETRIE PRES : utilise le th de prolongement, 2^{e} cas)

Ex : L^1(R) est le complété de l'ensemble des fonctions en escaliers.

3) Prolongement C^1

Th : f continue sur un intervalle I à valeurs dans un evn E, soit a un point de I. Si f est dérivable sur I\{a}, et si f' a une limite l en a, alors f est dérivable en a de dérivée l. En particulier, f' est continue en a. Du coup, si f est C^1 sur I\{a} et si f' a une limite en a, f es tC^1 sur I [Pom 90] *(utilise l'IAF)*

Ex :

Appl : $f(x)=\exp(-1/x^2)$ et f(0)=0 est C infini [Pom 90] (récurrence)

Appl : fonctions plateaux etc [Pom 91]

Rq : utile par la convolution car on a des fonctions lisses à support compact.

II) Prolongement d'applications linéaires [Far] + [Tiss]

Th : E, F deux evn, F complet. G un sev de E et u une appl lin continue de G dans F. L'adhérence de G est un sev et il existe une unique AL définie sur adh(G) qui prolonge u. En plus elles ont même norme [Tiss 60] *(on mq adh(G) est un sev. On mq puis que u est UC en utilisant la continuité en 0. On applique le th de prolongement d'une appl UC et on trouve un prolongement continu unique. On mq il est linéaire. Reste à montrer l'égalité des normes. Un sens facile, l'autre moins)*

1) Plancherel sur R [Far]

Déf : transformée de Fourier sur L^1 [Far 130] *Rq : la TF d'une fonction L^1 n'est pas forcément L^1. La TF peut pas être un isomph sur L^1.*

Prop : L^1 inter L^2 est dense dans L^2, R est complet, la TF est linéaire continue. Par le th précédent, la TF se prolonge sur L^2 de façon unique

Mais on veut en savoir plus sur ce prolongement : on veut montrer que la TF est un isomorphisme sur L^2, et qu'il est presque isométrique (le th précédent dit que la norme de la TF sur L^2 est la même que sur L1 inter L^2, mais ça dit pas que ça reste une presque isométrie)

Prop : TF est une bij sur S(R) [Far 135] *(sert pour montrer la surjectivité de la TF sur L^2)*

Lemme : approximation de Poisson [Far 132]

Th : la TF est presque une isométrie sur L^1 inter L^2 [Far 136] *(technique, produit de convolution)*

Cor : la TF se prolonge en un isomorphisme presque isométrique L^2 *(suites de Cauchy, complétude)*

2) Hahn Banach et applications [Tiss]

Th : (HB réel) E un R-ev, p une semi norme , F un sev de E. u une forme linéaire sur F tq u>p. Alors il existe une forme linéaire v qui prolonge u sur E et tq v<p [Tiss 267] *(on montre l'existence d'un prolongement maximal en considérant l'ensemble des (G,g) où G est un sev de E contenant F et g un prolongement sur g tq g>p. On définit une relation d'ordre sur cet ensemble, et on vérifie que l'ensemble est inductif. Par lemme de Zorn, il existe un élément maximal (G,g). Reste à vérifier que G=E. Par l'absurde, on suppose G différent de E, on prend a dans E\G, et on construit un prolongement sur G+<a> ce qui est absurde).*

Th : (HB complexe) Pareil avec des valeurs absolues sur u(x) [Tiss 269] *(partie réelle, partie imaginaire, HB réel…)*

Appl : (prolongement des formes linéaires continues) E evn, F sev, u forme linéaire continue sur F. On peut prolonger u sur E en v qui a même norme [Tiss 270] (HB avec p(x)=||u||.||x||

Appl : pour tout x dans E\{0} il existe une forme linéaire f tq f(x)=||x|| et ||f||=1 [Tiss 271] *(F=<x>, g(kx)=k||x||)*

Appl : pour y différent de z dans E, il existe f dans E' qui sépare les points [Tiss 271] *(appl précédente avec x=y-z)*

Cor : E' non nul [Tiss 271]

C-ex : (C([0,1]),d) a un dual nul pour d une certaine distance (qui n'est pas une norme bien sûr) [Tiss 271]

III) **Prolongements analytiques** [Tau] + [ZQ] + [BMP]

1) Principe du prolongement analytique [Tau]

Th : une fonction définie sur un ouvert U de C est dite analytique si elle est DES en tout point de U [Tau 50]

Th : si une série entière à un rayon de convergence R, la somme est analytique sur D(0,R) [Tau 50]

Th : soit f analytique sur U connexe. Alors f est identiquement nulle ssi f est identiquement nul au voisinage d'un point [Tau 52] *(soit V l'ensemble des points où f est nulle à leur voisinage. Par définition V est ouvert. Soit zn une suite de V qui cv vers b. Si on fixe k, la dérivée k-ième de f en tous les zn est nulle (puisque f est identiquement nulle au vois de zn) donc en passant à la limite, les dérivées successives en b sont nulles donc f est identiquement nulle au vois de b donc b est dans V, donc V fermé, comme U est connexe V est U tout entier)*

Cor : si f et g sont analytiques sur U connexe, et coïncident au voisinage d'un point, alors elles coïncident sur U entier [Tau 50] *(th précédent à f-g)*

Csq : f définie au voisinage d'un point, et g une fonction analytique la prolongeant. g est alors unique.

2) Prolongement de fonctions à variable complexes classiques [ZQ] + [BMP]

a) Fonction Gamma

Déf : gamma sur R+* [ZQ 313]

Prop : Gamma se prolonge sur {Re(z)>0} [ZQ 313] *(on écrit gamma sous une certaine forme qui coïncide avec celle sur R, on mq elle est holomorphe en dérivant sous l'intégrale)*

Prop : Gamma(z+1)=zGamma(z) [ZQ 313] *(IPP sur la déf de Gamma)*

Csq : il existe un prolongement holomorphe de Gamma sur C\{entiers négatifs} [ZQ 314] *(défini de proche en proche)*

Prop : Gamma se prolongement en une fonction méromorphe sur C\{N}, et on a une formule qui nous permet de lire immédiatement les pôles, leur ordre et les résidus [BMP 82]

b) Fonction Dzeta

Déf pour s>1 [ZQ 20]

Lemme : formule I.4 du ZQ sur la somme des f(n) [ZQ 20]

Prop : on peut prolonger Dzeta sur {Re(s)>0}\{1} ; formule [ZQ 20]

Prop : en fait on peut prolonger Dzeta à C\{1} [ZQ 28] *(très dur et très long, utilise la formule sommatoire de Poisson, la fonction gamma etc)*

3) Séries entières [ZQ 50-54]

Les théorèmes de cette partie sont difficiles à montrer.

Déf : un point du cercle de convergence est régulier si on peut prolonger analytiquement la somme sur un voisinage du point. Sinon il est dit singulier. On note A_r et A_s leur ensemble.

Prop : A_r est ouvert dans C, A_s est fermé.

Ex : série des z^n.

Th : il y a toujours au moins un point singulier sur C

Prop : supp tous les a_n positifs. Alors 1 est singulier pour la série entière

Th (lacunes de Hadamard) : soit l_n une suite d'entiers tq l_{n+1}/l_n>alpha>1 (ils croissent assez vite). Soit ∑a_nz^l_n une SE de rayon de cv 1. Alors tous les points du cercle sont singuliers.

Développements :
1 - Prolongement de Gamma [BMP 82] + [ZQ 313] (***)
2 - Polynômes orthogonaux (base hilbertienne + appl à L^2) [Dem] + [BMP] (**)
3 - Théorème de Plancherel [Far 136] (**)

Pas mis :
- prolongement des sols d'une équa diff : une solution est dite maximale si elle n'admet pas de prolongement. Si la fonction f est continue, il existe une solution maximale passant par un point donné, si en plus elle est loc lip, cette solution est unique.
- Th de Witt (isométrie) ; une isométrie n'est a priori pas une fonction.
- plein d'applications de HB
- HB géométrique
- prolongement de fonctions par périodicité, analyse de Fourier

Commentaires :
- Attention au titre de la leçon : « Prolongement de FONCTIONS. Ne pas prendre le risque de trop parler d'applications. Peut être changer le titre de la partie II en « prolongement de formes linéaires ».
- Etre TRES prudent sur le prolongement de Gamma, ainsi que le préconise le rapport du jury.

Bibliographie :
[BMP]
[ZQ]
[Pom]
[Far]
[Gou]
[Tiss]
[Tau]

Rapport du jury 2005 – 2009 : les questions liées au prolongement analytique font partie de la leçon. Le théorème de Hahn-Banach (en dimension infinie) n'est pas une nécessité absolue pour faire une leçon de niveau acceptable surtout quand on manque de recul sur la thématique.
En ce qui concerne le théorème de prolongement des applications uniformément continues, on ignore bien souvent la version linéaire, alors qu'elle peut être l'objet de développement intéressant, tel que le théorème de Plancherel, par exemple. Quant au prolongement de la fonction gamma en une fonction méromorphe dans tout le plan complexe, il serait bon de savoir que la relation fonctionnelle gamma(z + 1) = z gamma(z) permet de le faire en quelques lignes.